UNIVERSITE PAUL SABATIER

TOULOUSE III

L3 Parcours Physique et Application à l'Energie

EL5PPAB1

Année 2011/2012

TD 9 – TRANSFORMATIONS DE FOURIER

La transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ est définie par $F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi ut} dt$.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x)$ définie par $f(t) = \dfrac{H(t)e^{-\lambda t} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ avec $\lambda \text{ réel} > 0; \alpha > 0$, $H(t)$ la fonction de Heaviside et $\Gamma(\alpha)$ la fonction gamma. On posera $F_\alpha(z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} t^{\alpha-1} dt = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{z^\alpha}$ qui est définie pour $\alpha > 0$ et $z \neq 0$.

2. Ecrire pour cette fonction l'identité de Parseval. En déduire l'intégrale $J_\alpha = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{1}{1+x^2} \right)^\alpha dx$.

3. Calculer le produit de convolution $f(t) = \dfrac{H(t)e^{-\lambda t} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ par $g(t) = \dfrac{H(t)e^{-\lambda t} t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$. On calculera la transformée de Fourier de ce produit de convolution et on en déduira directement $f * g$.

4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\dfrac{|t|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $0 < \alpha < 1$, et en déduire la valeur du produit de convolution $\dfrac{|t|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \dfrac{|t|^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$.